МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23.05.2012 Г. – ВАРИАНТ 1

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Кое от числата принадлежи на интервала $[-1;1]$?

А) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ **Б)** $7^{-1}.49$ **В)** $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **Г)** $625^{-\frac{1}{4}}$

2. Числената стойност на израза $\sqrt{\sqrt{625}-\sqrt{81}}$ е равна на:

А) 16 **Б)** $2\sqrt[4]{34}$ **В)** 4 **Г)** $\sqrt{34}$

3. Допустимите стойности на израза $\frac{3+x}{\sqrt{3-x}}+\frac{1}{3x}$ са:

А) $x\in(-\infty;3)$ **Б)** $x\in(-\infty;3]$ **В)** $x\in(-\infty;0)\cup(0;3)$ **Г)** $x\in(3;\infty)$

4. Решенията на неравенството $\frac{x^2-4}{2x}\geq 0$ са:

А) $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$ **Б)** $(-\infty;-2]\cup(0;2]$

В) $[-2;0]\cup[2;\infty)$ **Г)** $[-2;0)\cup[2;\infty)$

5. Равенството $\frac{1}{4}.6^{\log_6 x}=x-6$ е вярно за x равно на:

А) -8 **Б)** $4,8$ **В)** $7\frac{1}{2}$ **Г)** 8

6. За **корените x_1 и x_2 на уравнението $-0,5x^2+22,5x-2=0$ е вярно, че:**

А) $x_1>0$ **и** $x_2<0$ **Б)** $x_1<0$ **и** $x_2<0$

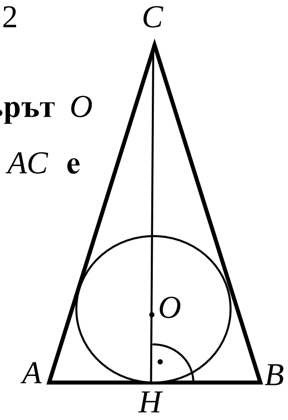
В) $x_1>0$ **и** $x_2>0$ **Г)** $x_1=-x_2$

7. Два от корените на уравнението $ax^4+bx^2+c=0$ са $-\frac{1}{3}$ и 2. Другите му корени са:

А) $-\frac{1}{2}$ **и** 3 **Б)** $-\frac{2}{3}$ **В)** -2 **Г)** -2 **и** $\frac{1}{3}$

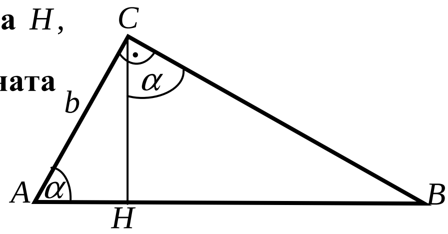
8. За $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ **стойността на израза** $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha$ **е:**

А) $-\frac{3}{2}$ **Б)** $-\frac{1}{2}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** $\frac{3}{2}$



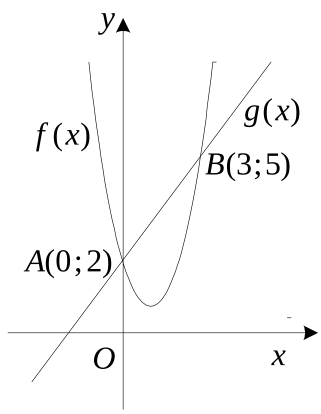
9. В равнобедрен $\triangle ABC$ **с основа** $AB = 8$ cm **е вписана окръжност. Центърът** O **на окръжността дели височината** CH **в отношение** $5:2$**. Дължината на** AC **е равна на:**

А) 6 cm **Б)** 10 cm **В)** 16 cm **Г)** 20 cm



10. Върху хипотенузата AB **на правоъгълния** $\triangle ABC$ **е взета точка** H, **така че** $\angle HCB = \angle CAB = \alpha$**. Ако** $AC = b$**, то диаметърът на описаната окръжност около** $\triangle HCB$ **е равен на:**

А) $b.\sin\alpha$ **Б)** $b.\cos\alpha$ **В)** $b.tg\alpha$ **Г)** $\frac{1}{2}b.tg\alpha$



11. На чертежа са построени графиките съответно на квадратната функция $f(x)$ **и на линейната функция** $g(x)$**. Тези графики се пресичат в точките** $A(0;2)$ **и** $B(3;5)$**. Решенията на неравенството** $f(x) > g(x)$ **са числата от интервала:**

А) $(-\infty;0)$ **Б)** $(0;3)$

В) $(-\infty;0)\cup(3;\infty)$ **Г)** $(3;\infty)$

12. Коя от формулите задава общия член a_n, $n \in \mathbb{N}$ **на редицата на всички естествени числа, които при деление на** 3 **дават остатък** 2**?**

А) $a_n = 3n+2$ **Б)** $a_n = 3n-1$ **В)** $a_n = 3n-2$ **Г)** $a_n = n^2+1$

13. Ако за аритметична прогресия е известно, че $a_2 + a_6 = 3$ **и сборът на първите** 13 **члена е равен на** 26**, то намерете разликата на прогресията.**

А) $\frac{1}{6}$ **Б)** $\frac{1}{3}$ **В)** 1 **Г)** 6

14. Клоун разполага с 2 **различни панталона,** 3 **вида ризи,** 5 **различни маски за лице и** 2 **перуки в различен цвят. По колко различни начини той може да избере комплект от панталон, риза, маска и перука за едно представление пред публика?**

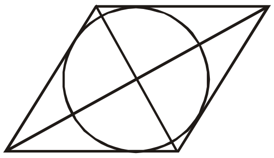
А) 12 **Б)** 24 **В)** 30 **Г)** 60

15. В таблицата са дадени измерените температури на 25.04.2012 **г. в** 12 **часа на обяд в няколко български града. С колко градуса се различава модата от средната стойност на температурите в статистическия ред от данни?**

$t°$ **(измерена температура по С)**	$10°$	$15°$	$20°$	$25°$
n **(брой градове с** $t°$ **по С)**	3	4	1	2

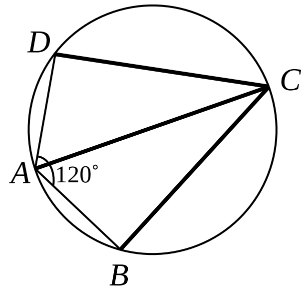
А) с $1°$ **Б) с** $4°$ **В) с** $6°$ **Г) с** $11°$

16. Страната на ромб е 12 cm **и острият му ъгъл е** $60°$**. Радиусът на вписаната в ромба окръжност е равен на:**



А) 3 cm **Б)** $3\sqrt{3}$ cm **В)** 6 cm **Г)** $6\sqrt{3}$ cm

17. Четириъгълникът $ABCD$ **е вписан в окръжност и** $\angle DAB = 120°$**. Ако** $BD = 12\text{cm}$ **и** $\angle ABC = \angle ADC$**, то диагоналът** AC **е равен на:**



А) $8\sqrt{3}$ cm **Б)** $8\sqrt{2}$ cm **В)** $6\sqrt{3}$ cm **Г)** $4\sqrt{3}$ cm

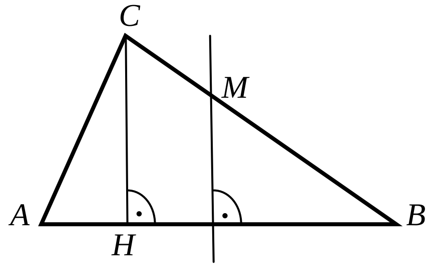
18. Даден е $\triangle ABC$**, за който** $AC = 3\text{cm}$**,** $BC = 6\text{cm}$ **и** $\angle ACB = 120°$**. Дължината на ъглополовящата** $CL (L \in AB)$ **е:**

А) 2 cm **Б)** 3cm **В)** $2\sqrt{3}$cm **Г)** $2\sqrt{7}$ cm

19. Трапецът $ABCD (AB \parallel CD)$ **със страни** $AB = 10$**,** $BC = 7$**,** $CD = 4$ **и** $AD = 5$ **е с лице, равно на:**

А) $2\sqrt{6}$ **Б)** $6\sqrt{6}$ **В)** $14\sqrt{6}$ **Г)** $42\sqrt{6}$

20. В $\triangle ABC$ **симетралата на страната** AB **пресича страната** BC **в точка** M **така, че** $BM : CM = 5 : 2$**. Ако** CH $(H \in AB)$ **е височина в** $\triangle ABC$**, намерете отношението** $AH : HB$**.**



А) $1:5$ **Б)** $3:5$ **В)** $3:7$ **Г)** $2:7$

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете стойността на израза $\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2(1+\sin\alpha)^{-1}$**, ако** $\sin\alpha \neq -1$**.**

22. Да се реши уравнението $\sqrt{2x^2-x-2}=-x$ **.**

23. Даден е изпъкнал n**–ъгълник. Броят на всички отсечки с краища измежду върховете му е** 45**. Да се намери броят** n **на върховете на многоъгълника.**

24. Група младежи решили да изпратят писма по Интернет с пожелания за късмет. Първия ден всеки от тях изпратил пожелания на петима свои приятели. Втория ден всеки от получилите пожеланието го препратил на други петима свои приятели и т.н., като всеки, получил пожелание предния ден, препращал пожеланието на петима свои приятели следващия ден. При тези условия в края на петия ден броят на изпратените пожелания бил $12\,500$ **. Колко са младежите от групата, започнали инициативата?**

25. Намерете лицето на правоъгълен триъгълник с хипотенуза 5 cm **и сбор от дължините на катетите** 6 cm**.**

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. За допустимите стойности на x **докажете тъждеството**

$$\left(\frac{1}{\cos 2x}-tg\,2x\right)(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) .$$

27. Краищата на отсечка $AB=3\text{cm}$ **са центрове на две окръжности, като радиусът на окръжността с център** A **е по-малък от радиуса на окръжността с център** B**. Радиусите са избрани случайно от пет отсечки с дължини** 1 cm**,** 2 cm**,** 4 cm**,** 5 cm **и** 9 cm**. Намерете броя на възможностите двете окръжности да имат поне една обща точка и вероятността построените окръжности да имат две общи точки?**

28. Четириъгълникът $ABCD$ **със страна** $BC=7$ **е вписан в окръжност с диаметър** 25 **и център точката** O**, която лежи на страната** AB**. Лицето на** $\triangle ACD$ **е равно на** 108**. Да се намерят лицето и периметърът на четириъгълника.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\quad D=b^2-4ac$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\quad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\quad a^{\log_a b}=b$ $\quad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 0$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\quad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\quad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $\quad S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $\quad a^2 = a_1 c \; b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1 \quad r = \frac{a+b-c}{2} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) \qquad m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right) \qquad m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $\qquad l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c \quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a \;\; S = ab\sin\alpha$ $\qquad$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big) \qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 23 май 2012 г.

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	**Верен отговор**	**Брой точки**
1	**Г**	2
2	**В**	2
3	**В**	2
4	**Г**	2
5	**Г**	2
6	**В**	2
7	**Г**	2
8	**А**	2
9	**Б**	2
10	**В**	2
11	**В**	3
12	**Б**	3
13	**А**	3
14	**Г**	3
15	**А**	3
16	**Б**	3
17	**А**	3
18	**А**	3
19	**В**	3
20	**В**	3
21	1	4
22	$x=-1$	4
23	$n=10$	4
24	4	4
25	$S=\frac{11}{4}\text{cm}^2=2\frac{3}{4}\text{cm}^2=2,75\text{cm}^2$	4
26	**–**	10
27	Брой 5**,** $P=\frac{1}{5}$	10
28	$S_{ABCD}=192$ **и** $P_{ABCD}=62$	10

Въпроси с решения

26. Критерии за оценяване на задача 26

Първи начин:

1. (1 точка) $\frac{1}{\cos 2x} - tg2x = \frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}$.

2. (2 точки) $\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$.

3. (2 точки) $\frac{(\sin x - \cos x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)}$.

4. (1 точки) $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} . (\sin x + \cos x) = \cos x - \sin x$.

5. (3 точки) $\cos x - \sin x = \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

6. (1 точки) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Втори начин:

1. (1 точка) $\left(\frac{1}{\cos 2x} - tg2x\right)(\sin x + \cos x) - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$

2. (2 точки) $\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}(\sin x + \cos x) - \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right) = 0$.

3. (3 точки) $\frac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}(\sin x + \cos x) - \cos x + \sin x = 0$.

4. (2 точки) $\frac{1-2\sin x\cos x}{\cos x - \sin x} - \cos x + \sin x = 0$.

5. (1 точка) $\frac{1-2\sin x\cos x - \cos^2 x + \sin x\cos x + \sin x\cos x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = 0$.

6. (1 точки) Сведено до $0 = 0$

27. Критерии за оценяване на задача 27.

1. (4 точки) Нека $AB = 3\,\text{cm}$ е дадената отсечка, а $k_A(A; r_A)$ и $k_B(B; r_B)$ са двете окръжности с радиуси $r_A < r_B$. Окръжностите ще имат точно една обща точка тогава и само тогава, когато $r_A + r_B = 3$ или $r_B - r_A = 3$. Благоприятните възможности за избора на радиусите са три – числата 1 и 2, или 1 и 4, или 2 и 5.

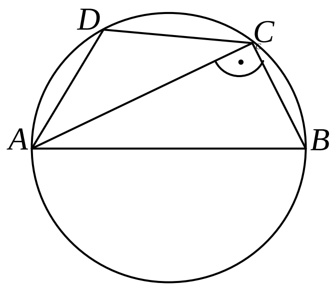
2. (3 точки) Окръжностите ще имат две общи точки тогава и само тогава, когато числата 3, r_A и r_B са дължини на страните на триъгълник. Благоприятните възможности за избора на радиусите са две – числата 2 и 4 или 4 и 5.

3. (1 точка) Броят на възможностите двете окръжности да имат поне една обща точка е равен на сбора от възможности да имат точно една обща точка с тези да имат точно 2 общи точки. Този брой е 5.

4. (1 точка) Всички възможни избори за дължини на r_A и r_B са $C_5^2 = \frac{5.4}{1.2} = 10$.

5. (1 точка) Търсената вероятност е $P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

28. Критерии за оценяване на задача 28



1. (1 точка) Определяне на AB -диаметър, $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, $\angle ADC > 90^\circ$.

2. (1 точка) Намиране на $AC = 24$.

3. (1 точка) Намиране на $S_{ABC} = 84$ и $S_{ABCD} = 192$.

4. (2 точки) $\sin\angle ABC = \sin\angle ADC = \frac{24}{25}$, $\cos\angle ADC = -\cos\angle ABC = -\frac{7}{25}$.

5. (1 точка) Намиране на $AD.DC = 225$.

6. (1 точка) Намиране на $AD^2 + CD^2 = 450$.

7. (2 точки) Намиране на $AD = DC = 15$ или $AD + DC = 30$.

8. (1 точка) Намиране на $P_{ABCD} = 62$.